ANALİZ IV ARASINAV SORULARI

1. (a_n) ve (b_n), $\mathbb{R}^n$ de diziler olsunlar. Eğer (a_n) ve (a_n+b_n) yakınsak dizilerse (b_n) dizisinin de yakınsak olacağını limit tanımını kullanarak gösteriniz.

2. $\mathbb{R}^2$ de terimleri aşağıdaki biçimde verilen dizilerin varsa limitlerini bulunuz.

a. $x_n = \left(\dfrac{(-1)^{n+2} n^2}{2+n^3}, \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(1+3n)} \right)$ **b.** $x_n = \left(\dfrac{e^{4n}}{3-e^{3n}}, \dfrac{\cos^2(n\pi)}{n} \right)$

3. $A=\{1\}\cup\left\{\dfrac{n}{n+1} : n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesinin kompakt olup olmadığını araştırınız.

4. $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}\cap\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ kümesinin bağlantılı olup olmadığını araştırınız.

5. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy^2-12xy+12x+3y^2-12y+12}{(x+1)^2+(y-2)^2}, & (x,y)\neq(-1,2) \\ 0, & (x,y)=(-1,2) \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f fonksiyonunun $(-1,2)$ noktasındaki sürekliliğini araştırınız.

6. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, C^1 sınıfından bir fonksiyon, $D_1 f(1,2)=1$ ve $D_2 f(1,2)=3$ olsun. Bir g fonksiyonu da

$$g(x,y,z)= f\left(x^2-yz, xy+\cos z\right)$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $g_x(1,1,0)$, $g_y(1,1,0)$ ve $g_z(1,1,0)$ kısmi türevlerini bulunuz.

7. $\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ denklemini $u=x, v=x^2+y^2$ biçiminde verilen u ve v değişkenlerine göre yazınız.

8. $P=(1,2,3)$ ve $Q=(4,6,15)$ noktaları için $f(x,y,z)=xy+xz+yz$ fonksiyonunun PQ vektörü yönündeki türevini bulunuz ve türevin P noktasındaki değerini belirleyiniz.

CEVAPLAR

1. $a_n \to a \in \mathbb{R}^n$ ve $a_n + b_n \to L \in \mathbb{R}^n$ olsun. $a_n \to a$ olduğundan herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_1$ olduğunda

$$\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Yine $a_n + b_n \to L$ olduğundan aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_2$ olduğunda

$$\|a_n + b_n - L\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ saysı vardır. Eğer $n_0 = maks\{n_1, n_2\}$ seçilirse aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_0$ olduğunda (1) ve (2) kullanılarak

$$\begin{aligned}\|b_n - (L - a)\| &= \|b_n + a_n - a_n - L + a\| \\ &= \|(a_n + b_n - L) + (a - a_n)\| \\ &\leq \|a_n + b_n - L\| + \|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $b_n \to L - a$ olup (b_n) dizisi yakınsaktır.

1. 2. a. $x_n = \left(\dfrac{(-1)^{n+2} n^2}{2 + n^3}, \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(1+3n)} \right) \subset \mathbb{R}^2$ dizisinde $a_n = \left(\dfrac{(-1)^{n+2} n^2}{2 + n^3} \right)$, $b_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(1+3n)} \right)$ olsun. $(a_n) \subset \mathbb{R}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2 + n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3\left(\frac{2}{n^3} + 1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(\frac{2}{n^3} + 1\right)} = 0$$

olur. Ayrıca $\left((-1)^{n+2}\right)$ dizisi sınırlı olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+2} \frac{n^2}{2 + n^3} = 0 \qquad (1)$$

bulunur.

Şimdi $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(1+3x)}$ fonksiyonunu alalım. Buradan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(1+3x)} \to \frac{\infty}{\infty} \quad \text{(L'Hospital)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{3}{1+3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+3x}{3x+3} = 1$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(1+3n)} = 1 \qquad (2)$$

olur. O halde (1) ve (2) limitlerinden

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (a_n, b_n) = (0,1)$$

elde edilir.

b. $x_n = \left(\frac{e^{4n}}{3-e^{3n}}, \frac{\cos^2(n\pi)}{n} \right)$ dizisinde $a_n = \frac{e^{4n}}{3-e^{3n}}$, $b_n = \frac{\cos^2(n\pi)}{n}$ olsun. $(a_n) \subset \mathbb{R}$ dizisi için $f(x) = \frac{e^{4x}}{3-e^{3x}}$ fonksiyonunu alalım.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{4x}}{3-e^{3x}} \to \frac{\infty}{-\infty} \quad \text{(L'Hospital)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{4x}}{\frac{-3e^{3x}}{1+3x}} = -\frac{4}{3} \lim_{x\to\infty} e^x = -\infty$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{4n}}{3-e^{3n}} = -\infty$ bulunur. O halde $x_n \subset \mathbb{R}^2$ dizisi ıraksaktır.

3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < \frac{n}{n+1}$ dır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n < n+1 \;\Rightarrow\; \frac{n}{n+1} < 1$$

olup $0 < \frac{n}{n+1} < 1$ olur. O halde her $x \in A$ için $0 < x \le 1$ bulunur. Yani A kümesi sınırlıdır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{n}{n+1}$ biçiminde tanımlı (a_n) dizisini alalım. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \in A$$

dır. A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul A kümesinden alınan her yakınsak dizinin limitinin A kümesinde olmasıdır. O halde A kümesi kapalıdır. A kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.

4.

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cap\left\{(x,0):x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{(-1,0),(1,0)\right\}$$

biçimindedir. Şimdi $B\left((-1,0),\frac{1}{2}\right)$ ve $B\left((1,0),\frac{1}{2}\right)$ açık yuvarlarını alalım. Böylece

$$B\left((-1,0),\frac{1}{2}\right)\cap B\left((1,0),\frac{1}{2}\right)=\varnothing$$

olur. Yani bu yuvarlar ayrıktır. Yine

$$B\cap B\left((-1,0),\frac{1}{2}\right)=\left\{(-1,0)\right\},\ B\cap B\left((1,0),\frac{1}{2}\right)=\left\{(1,0)\right\}$$

ve

$$B\subset B\left((-1,0),\frac{1}{2}\right)\cup B\left((1,0),\frac{1}{2}\right)$$

olduğundan B kümesi bağlantılı değildir.

5. Herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı verilsin. Bir $\delta>0$ sayısını $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ seçelim. Bu takdirde $\left\|(x,y)-(-1,2)\right\|=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}<\delta$ ve böylece

$$|x+1|\le\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}<\delta$$
$$|y-2|\le\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}<\delta$$

olduğunda

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{3xy^2-12xy+12x+3y^2-12y+12}{(x+1)^2+(y-2)^2}\right|=\left|\frac{3(x+1)(y-2)^2}{(x+1)^2+(y-2)^2}\right|$$

$$\le\frac{3|x+1|\left((x+1)^2+(y-2)^2\right)}{(x+1)^2+(y-2)^2}=3|x+1|<3\delta=\varepsilon$$

elde edilir. O halde f fonksiyonu $(-1,2)$ noktasında süreklidir.

6. Eğer $u(x,y,z)=x^2-yz$, $v(x,y,z)=xy+\cos z$, ve $h(x,y,z)=(u,v)$ denirse

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \to (u,v) \to f(u,v) = f\big(h(x,y,z)\big) = f\left(x^2 - yz, xy + \cos z\right)$$

olur. Böylece $g = f \circ h$ olup

$$J_g(x,y,z) = J_{f\circ h}(x,y,z) = J_f\big(h(x,y,z)\big) J_h(x,y,z) = J_f(u,v) J_h(x,y,z),$$

buradan

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}$$

yazılır. O halde

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & -z & -y \\ y & x & -\sin z \end{pmatrix}$$

olup,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 2x\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + y\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \qquad \Rightarrow$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1,0) = 2\cdot 1\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(1,2) + 1\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 3 = 5 \text{ bulunur.}$$

Yine

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = -z\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + x\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \qquad \Rightarrow$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,1,0) = 0\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(1,2) + 1\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 0\cdot 1 + 1\cdot 3 = 3 \text{ bulunur.}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = -y\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) - \sin z\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \qquad \Rightarrow$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,0) = -1\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(1,2) + \sin 0\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = -1\cdot 1 + 0\cdot 3 = -1 \text{ elde edilir.}$$

7.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2x\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2u\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2y\frac{\partial z}{\partial v} = 2\sqrt{v-u^2}\,\frac{\partial z}{\partial v}$$

olduğundan

$$\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+2u\frac{\partial z}{\partial v}-2u\sqrt{v-u^2}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial u}+2u\left(1-\sqrt{v-u^2}\right)\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

sonucuna varılır.

8. $PQ=(4-1,6-2,15-3)=(3,4,12)$ ve $\|PQ\|=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=\sqrt{169}=13$ olduğundan yönü belirten birim vektör $v=\left(\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{12}{13}\right)$ olur. f fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ içindeki her noktada diferansiyellenebilir(kısmi türevler var ve sürekli) ve $f_x=y+z,\ f_y=x+z,\ f_z=x+y$ dir. Böylece aranan yönlü türev

$$\begin{aligned}D_v f &=\nabla f\bullet v=(y+z,x+z,x+y)\bullet\left(\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{12}{13}\right)\\ &=\frac{3}{13}(y+z)+\frac{4}{13}(x+z)+\frac{12}{13}(x+y)=\frac{16x+15y+7z}{13}\end{aligned}$$

ve P noktasındaki değeri

$$D_v f(P)=\frac{16.1+15.2+7.3}{13}=\frac{67}{13}$$

olarak bulunur.